5. Pastukhova S. E. Improved approximations of resolvents in homogenization of higher order operators / S. E. Pastukhova // J. Math. Sci. — 2021. V. 259, № 2. — P. 230–243.

6. Пастухова С. Е. Улучшенные L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении операторов четвёртого порядка / С. Е. Пастухова // Алгебра и анализ. — 2022. Т. 34, № 4. — С. 74—106.

АСИМПТОТИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ХАРТРИ. АСИМПТОТИКА САМОСОГЛАСОВАННОГО ПОТЕНЦИАЛА [1]

А.В. Перескоков (Москва, НИУ МЭИ, НИУ ВШЭ)
pereskokov62@mail.ru

Рассмотрим задачу на собственные значения для нелинейного оператора Хартри в пространстве $L^2(\mathbb{R}^3)$ с кулоновским взаимодействием:

$$(-\Delta_q - \frac{1}{\mid q \mid} + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\mid \psi(q') \mid^2}{\mid q - q' \mid} dq')\psi = \lambda\psi, \qquad \|\psi\|_{L^2(\mathbb{R}^3)} = 1, \qquad (1)$$

где Δ_q — оператор Лапласа, $\varepsilon > 0$ — малый параметр. Уравнения самосогласованного поля во внешнем поле, содержащие интегральную нелинейность типа Хартри, играют фундаментальную роль в некоторых квантовомеханических моделях, а также в нелинейной оптике.

Хорошо известно, что при $\varepsilon = 0$ собственные значения $\lambda = \lambda_n(\varepsilon)$ задачи (1) равны $\lambda_n(0) = -1/4n^2$, $n = 1, 2, \ldots$. Здесь n — главное квантовое число. Оно представимо в виде $n = \ell + n_r + 1$, где ℓ — орбитальное, а n_r — радиальное число.

Рассмотрим случай, когда число ℓ велико (для определенности будем считать, что ℓ имеет порядок $\varepsilon^{-2/3}$). В настоящей работе при $\ell \to \infty$ для небольших радиальных чисел $n_r = 0, 1, 2, \ldots$ найдена серия асимптотических собственных значений

$$\lambda_{\ell,n_r}(\varepsilon) = \frac{1}{(\ell + n_r + 1)^2}\big(-\frac{1}{4} + \frac{\varepsilon}{\pi^3}\int_0^1 K(\kappa)K(\sqrt{1-\kappa^2})d\kappa + O(\ell^{-2+\gamma})\big),$$

где $\gamma > 0$ — любое. Здесь $K(\kappa)$ — полный эллиптический интеграл 1 рода.

---

[1] Результаты получены в рамках выполнения государственного задания Минобрнауки России (проект FSWF-2023-0012)

Соответствующие асимптотические собственные функции локализованы вблизи сферы в $\mathbb{R}^3$ и не являются радиально-симметричными. Они выражаются через функции Бесселя $J_{|m|}$ и полиномы Эрмита H_{n_r} [1]. Здесь магнитное число $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ также предполагается небольшим.

Кроме того, в данной работе получены асимптотические разложения самосогласованного потенциала около сферы, вблизи которой локализованы собственные функции. Положим $\hbar = 1/\ell$. Пользуясь растяжением $q = x/\hbar^2$, $\psi = \hbar^3 p(x)$, $\lambda = \hbar^2 E$, приведем задачу (1) к стандартному для теории квазиклассического приближения виду. Переходя далее в сферическую систему координат (r, θ, φ), где $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$, а также делая подстановку

$$p(x) = \frac{g(r,\theta)}{\sqrt{2\pi \sin\theta}\, r} e^{im\varphi}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots,$$

имеем:

$$\Big\{ -\hbar^2 \Big[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \Big(\frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{4} - \frac{m^2 - 1/4}{\sin^2\theta} \Big) \Big] - \frac{1}{r} +$$

$$+ \varepsilon \int_0^\pi \int_0^\infty W(r, r', \theta, \theta') g^2(r', \theta') dr' d\theta' - E \Big\} g(r, \theta) = 0,$$

$$\int_0^\pi \int_0^\infty g^2(r,\theta) dr d\theta = 1.$$

Здесь

$$W(r, r', \theta, \theta') = \frac{2}{\pi \sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta + \theta')}} \times$$

$$\times K \left(\frac{2\sqrt{rr' \sin\theta \sin\theta'}}{\sqrt{r^2 + (r')^2 - 2rr' \cos(\theta + \theta')}} \right).$$

Введем новые переменные $s = (r-2)/(2\sqrt{\hbar})$, $s' = (r'-2)/(2\sqrt{\hbar})$, и пусть $|s| = O(\hbar^{-\gamma})$ для любого $\gamma > 0$. Тогда для самосогласованного потенциала

$$u(s,\theta) = \int_0^\pi \int_{-1/\sqrt{\hbar}}^\infty W(s, s', \theta, \theta') g^2(s', \theta') 2\sqrt{\hbar}\, ds' d\theta'$$

вблизи сферы $r = 2$ справедливы следующие асимптотики: [1]
при $0 \leqslant \theta \leqslant \delta_1$ и $\pi - \delta_1 \leqslant \theta \leqslant \pi$, где δ_1 имеет порядок $\hbar^{3/4}$,

$$u(s,\theta) = \frac{1}{2\pi} \left(\ln \frac{8}{\sqrt{\hbar}} - \int_{-\infty}^\infty \ln|s - s'|\, y_0^2(s')\, ds' \right) + O(\hbar^{1/4-\gamma});$$

при $\delta_2 \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta_2$, где δ_2 имеет порядок $\hbar^{1/4}$,

$$u(s,\theta) = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{B(\theta)}{\pi} - \frac{\sqrt{\hbar}}{\sin\theta}\int_{-\infty}^{\infty}|s-s'|\,y_0^2(s')\,ds'\right) + O(\hbar^{1/2-\gamma});$$

при $\delta_1 \leqslant \theta \leqslant \delta_2$

$$u(s,\theta) = \frac{1}{2\pi}\left(-\ln\frac{\theta}{16} + V(s,\frac{\theta}{\sqrt{\hbar}})\right) + O(\hbar^{1/2-\gamma})$$

и, наконец, при $\pi - \delta_2 \leqslant \theta \leqslant \pi - \delta_1$

$$u(s,\theta) = \frac{1}{2\pi}\left(-\ln\frac{\pi-\theta}{16} + V(s,\frac{\pi-\theta}{\sqrt{\hbar}})\right) + O(\hbar^{1/2-\gamma}).$$

Здесь $\gamma > 0$ — любое, функции B и V имеют вид

$$B(\theta) = \int_0^{\pi}\frac{1}{\sin((\theta+\theta')/2)}K\left(\frac{2\sqrt{\tan(\theta/2)\tan(\theta'/2)}}{\tan(\theta/2)+\tan(\theta'/2)}\right)d\theta',$$

$$V(s,\xi) = \int_0^{\infty}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}M(s,s',\xi,\xi')\,y_0^2(s')\,ds' - \right.$$
$$\left. - \frac{2}{\pi(\xi+\xi')}K\left(\frac{2\sqrt{\xi\xi'}}{\xi+\xi'}\right)\right\}d\xi',$$

где

$$M(s,s',\xi,\xi') = \frac{2}{\pi\sqrt{(\xi+\xi')^2+(s-s')^2}}K\left(\frac{2\sqrt{\xi\xi'}}{\sqrt{(\xi+\xi')^2+(s-s')^2}}\right),$$

$$y_0(s) = \frac{e^{-s^2}H_{n_r}(s)}{\sqrt[4]{\pi}\sqrt{n_r!}2^{n_r/2}}.$$

Таким образом, вблизи точек $\theta = 0$ и $\theta = \pi$, которые соответствуют полюсам сферы, асимптотика самосогласованного потенциала существенно изменяет свой вид.

Литература

1. Pereskokov A.V. Asymptotic solutions to the Hartree equation near a sphere. Asymptotics of self-consistent potentials / A.V. Pereskokov // J. Math. Sci. — 2023. — V. 276, № 1. — P. 154–167.